Die rationalen Zahlen

Reinhard Fink

7. November 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

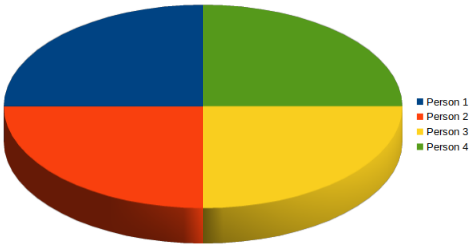
Bis jetzt lässt sich die Rechnung

$$1 : 4 =$$

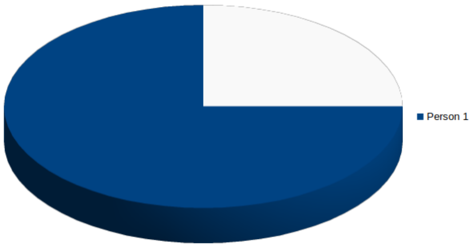
in unserer Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ nicht lösen. Die geniale Idee ist jedoch aus unserer Rechnung durch eine etwas andere Schreibweise eine Lösung herzu zaubern, die wir alle schon von früher kennen :-)

$$1 : 4 = \frac{1}{4}$$

Wir benötigen „nur“ noch eine Vorstellung unserer neuen Zahlen.
Eine Torte auf 4 Personen aufgeteilt sieht dann so aus:



Wenn wir 3 Torten auf 4 Personen aufteilen, dann kann Person 1 folgendes aus 3 Stücken bilden:



Dies entspricht der Rechnung:

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

und wir sehen, dass unsere neuen Zahlen Bruchteile eines Ganzen darstellen.
Und weiter wie bisher

2 Geschichte

Bei de alten Ägyptern als Stammbrüche ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, usw.) seit 1800 v. Chr. belegt im Papyrus Rhind um 1550 v. Chr. (https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind).

3 Darstellung am Zahlenstrahl

Die neuen Bruchzahlen füllen nun einige, aber nicht alle Plätze zwischen unseren ganzen Zahlen am Zahlenstrahl.

4 Definition rationale Zahlen, bzw. Bruchzahlen

Definition 1 (Die rationalen Zahlen)
$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} \mid z, n \in \mathbb{Z}\}$
nennen wir die Menge der rationalen Zahlen *oder die* Menge der Bruchzahlen.
z heißt der Zähler
z heißt der Nenner

Schreibweise:

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

5 Eigenschaften von $\mathbb{Q}$

5.1 Keinen unmittelbaren Vorgänger/Nachfolger

Zu einer Bruchzahl können wir keinen unmittelbaren Vorgänger oder Nachfolger angeben.

5.2 $\mathbb{Q}$ erweitert $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ erweiter die Menge der ganzen Zahlen. Die ganzen Zahlen sind als Teilmenge in $\mathbb{Q}$ enthalten.

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$-1 = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = -\frac{1}{1}$$

5.3 Mächtigkeit

Erstaunlicherweise gibt es zwischen ganzen Zahlen immer unendlich viele Bruchzahlen, aber man kann zeigen, dass man die Bruchzahlen durchzählen kann und sie somit gleich viele, wie die natürlichen Zahlen sind.

5.4 Darstellung

Ein und die selbe rationale Zahl auf der Zahlengerade, lässt sich auf verschiedene Art darstellen. Dies führt uns zu zwei wichtigen Begriffen beim Bruchrechnen.

5.4.1 Kürzen & Erweitern

Wie man leicht einsieht bekommt man genau so viel zum Essen, wenn man von einer Torte die Hälfte oder zwei Viertel oder vier Achtel erhält. In der Praxis führt weiteres Teilen irgendwann nur noch zu Bröseln, aber mathematisch gilt:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Definition 2 (Kürzen & Erweitern)
Wird der Zähler UND der Nenner mit der gleichen ganzen Zahl multipliziert, dann nennt man das Erweitern *eines Bruches.*
Wird der Zähler UND der Nenner mit durch die gleichen ganzen Zahl dividiert (falls möglich), dann nennt man das Kürzen *eines Bruches.*

Übung 1

- *Gib zum Bruch* $\frac{5}{6}$ *drei erweiterte Darstellungen an.*
- *Kürze den Bruch* $\frac{24}{30}$ *mit* 2 *und* 3. *Finde seine Darstellung mit den kleinsten Zahlen.*
- *Kürze den Bruch* $\frac{4290}{18018}$.
  Warum ist hier schwierig die kleinste Darstellung zu finden.
  Gib den Bruch in Wolfram Alpha ein.

5.4.2 Echte und unechte Bruchzahlen

Der Einfachheit wegen betrachten wir im nachfolgenden nur positive rationale Zahl. Für negative ist das nachfolgende sofort klar. Bruchzahlen zwischen 0 und 1 werden als echte Brüche bezeichnet. Der Zähler ist hier kleiner als der Nenner.
Bei Unechte Brüchen ist der Abstand zu 0 größer als 1. Der Zähler ist hier größer als der Nenner. In unechten Brüchen steckt also ein Teil „ganze Zahl“.
Beispiel:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Man nett die Darstellung $1\frac{1}{2}$ auch gemischte Zahl. Sie ist zum Lesen angenehm bereitet aber bei Rechnungen mit Multiplikationen und Divisionen Probleme und sollte daher in eine reine Bruchschreibweise umgewandelt werden.

5.5 Darstellung als Dezimalzahl

Jede Bruchzahl lässt sich durch Ausdividieren in eine Dezimalzahl umwandeln.
Beispiel:

$$1 : 2 = 0{,}5$$

Doch manchmal entsteht eine Periode, das heißt die Reste wiederholen sich und der Rest 0 taucht nie auf.

$$1 : 3 = 0,3333\cdots = 0.\dot{3}$$

Und hier noch ein „schlimmeres“ Beispiel:

$$1 : 7 = 0,\dot{1}4285\dot{7}$$

wobei die Punkte den Anfang und das Ende der Periode anzeigen.

Übung 2
Führe die Division $1 : 7 =$ *selbst durch.*

Die Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl in eine Bruchzahl ist möglich, wird hier jedoch nicht besprochen.
Nichtperiodische Dezimalzahlen lassen sich einfach umwandeln:
Beispiele:

$$0,3 = \frac{3}{10} \quad 0,35 = \frac{35}{100} \quad 0,352 = \frac{352}{1000}$$

Satz 1
Nicht jede Dezimalzahl lässt sich als Bruchzahl darstellen. Ein Gegenbeispiel ist z.B. $\sqrt{2}$. *Diese Zahlen nennt man irrationale Zahlen.*

Und erstaunlicherweise gibt es viel mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen. So viele, dass man sie nicht durchzählen kann.

5.6 Ordnung

Die Menge der Bruchzahlen ist geordnet.
Allerdings lassen sich zwei Bruchzahlen nicht immer auf den ersten Blick vergleichen. Welche Bruchzahl ist größer $\frac{8}{15}$ oder $\frac{11}{20}$? Wir könnten beide Brüche ausdividieren. Dies ist jedoch recht mühsam.
Wir versuchen daher geschickter die beiden Brüche durch „Erweitern“ vergleichbar zu machen.

$$\frac{8}{15} = \frac{16}{30} = \frac{24}{45} = \frac{32}{60}$$

$$\frac{11}{20} = \frac{22}{40} = \frac{33}{60}$$

Wir suchen also einen gemeinsamen Nenner für beide Brüche. Welche Zahl wird sowohl von 15 als auch von 20 geteilt.
Diese Zahl existiert übrigens immer, da z.B. das Produkt $15 \;.\; 20 = 300$ natürlich sowohl von 15 als auch 20 geteilt wird.

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 20}{15 \cdot 20} = \frac{160}{300}$$

$$\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 15}{20 \cdot 15} = \frac{165}{300}$$

Übung 3 (Brüche ordnen)
Ordne die nachfolgenden Brüche der Größe nach: $\frac{7}{12}$ *und* $\frac{9}{14}$*;* $\frac{5}{12}$ *und* $\frac{6}{13}$*;* $\frac{3}{4}$ *und* $\frac{4}{3}$

Wie oben begründet, lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 2 (gemeinsamer Nenner)
Zwei Brüche lassen sich immer auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

6 Rechenoperationen in $\mathbb{Q}$

Um mit unseren Bruchzahlen etwas anfangen zu können, benötigen wir Rechenregeln, wie mit diesen umzugehen ist.

6.1 Multiplikation mit einer ganzen Zahl

Stellen wir uns die Rechnung

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

vor, dann können wir folgende Rechenregel formulieren:

Rechenregel 1 (Bruch mal ganze Zahl)
Sei $a \in \mathbb{Z}$ *und* $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$

$$a \cdot \frac{z}{n} = \frac{a \cdot z}{n}$$

6.2 Division durch eine ganzen Zahl

Einfach

$$\frac{6}{7} : 2 = \frac{6 : 2}{7} = \frac{3}{7}$$

aber

$$\frac{5}{7} : 2 = : -($$

macht uns Mühe :-(
Bedenken wir jedoch, dass jeder Bruch verschieden Darstellungen haben kann, dann :-)

$$\frac{5}{7} : 2 = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 7} : 2 = \frac{10 : 2}{2 \cdot 7} : 2 = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

Und da wir immer so „günstig“ erweitern können, folgt:

Rechenregel 2 (Bruch dividiert durch ganze Zahl)
Sei $a \in \mathbb{Z}$ *und* $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{z}{n} : a = \frac{z}{n \cdot a}$$

6.3 Bruch mal Bruch

Betrachten wir die Rechnung

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} =$$

und zerlegen den zweiten Bruch in eine Division, dann erhalten wir:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot (2 : 7) = \frac{3}{5} \cdot 2 : 7 = \frac{3 \cdot 2}{5} : 7 = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{36}$$

und wir können nachfolgende Rechenregel formulieren:

Rechenregel 3 (Bruch mal Bruch)
Sei $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

Merkregel: Zähler mal Zähler & Nenner mal Nenner

6.4 Bruch durch Bruch

Betrachten wir die Rechnung

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} =$$

stellen wir fest, dass sich Fünftel und Siebtel nicht vergleichen bzw. messen lassen :-(Aber wieder hilft, die Tatsache, dass sich Brüche in verschiedene Darstellungen schreiben lassen. Und so finden wir leicht eine Darstellung , in der sich Äpfel & Birnen in Form von Fruchtmuß vergleichen lässt. Wir bringen beide Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und können dann die Zähler miteinander vergleichen :-)

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} : \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{35} : \frac{2 \cdot 5}{35}$$

und es bleibt zu überprüfen bzw. messen, wie oft $2 \cdot 5$ in $3 \cdot 7$ in Platz hat.

$$(3 \cdot 7) : (2 \cdot 5) = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$$

Wir sehen also, dass wir den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multiplizieren.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2}$$

Wir können die Division auf die Multiplikation von Brüchen zurückführen und müssen bis auf das Umkehren eines Bruches kaum Neues lernen.

Definition 3 (Kehrwert eines Bruches)
Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
Dann nennt man $\frac{b}{a}$ *den* Kehrwert *des Bruches* $\frac{a}{b}$.

Rechenregel 4 (Bruch durch Bruch)
Sei $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{ad}{bc}$$

Merkregel: Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

6.5 Doppelbrüche

Manchmal kommt im Zähler oder auch im Nenner eines Bruches wieder ein Bruch vor. Man nennt dies dann einen Doppelbruch. Beispiel: $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ und leider existiert zum Auflösen eine eigene, meiner Meinung nach unnötige Regel (Glieder usw.)
Da ein Bruchstrich nichts anderes als eine andere Schreibweise für eine Division ist, kann man dies einfach anwenden, ist in allen Fällen auf der sicheren Seite und spart sich das Lernen einer zusätzlichen Rechenregel :-)

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$$

Übung 4 (Doppelbrüche auflösen)
Löse nachfolgende Doppelbrüche auf:

- $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} =$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$
- $\frac{3}{\frac{4}{5}} =$
- $\frac{\frac{3}{4}}{5} =$

6.6 Addition und Subtraktion zweier Bruchzahlen

6.6.1 Fall 1: mit gemeinsamen Nenner

+: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$

-: $\frac{6}{13} - \frac{4}{13} = \frac{2}{13}$

6.6.2 Fall 2: mit verschiedenem Nenner

+: $\frac{3}{10} + \frac{5}{8} =$

Idee: Wir bringen beide Brüche auf gleichen Nenner.

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{8} = \frac{12}{40} + \frac{25}{40} = \frac{37}{40}$$

oder etwas länger

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{10 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 10}{8 \cdot 10} = \frac{24}{80} + \frac{50}{80} = \frac{74}{80} = \frac{37}{40}$$

-: $\frac{9}{10} - \frac{5}{8} = \frac{36}{40} - \frac{25}{40} = \frac{11}{40}$

Rechenregel 5 (Addition und Subtraktion zweier Bruchzahlen)
Sei $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

Zwei Bruchzahlen werden addiert, indem man sie auf gleichen Nenner bringt und dann die Zähler addiert.

6.6.3 Bemerkung: Addition und Subtraktion gemischter Bruchzahlen

$2\frac{9}{10} + 3\frac{11}{15} = 2 + \frac{9}{10} + 3 + \frac{11}{15} = 5 + \frac{9}{10} + \frac{11}{15} = 5 + \frac{27}{30} + \frac{22}{30} = 5 + \frac{49}{30} = 6 + \frac{19}{30} = 6\frac{19}{30}$

Übung 5 (Bruchrechentechnik)
Achtung: Ergebnisse bitte immer gekürzt angeben!
Arbeitsweise: 1.a) 2.a) ... dann erst 1.b) 2.b.) ... usw.

1. *Berechne „ungünstig (Kürzen vergessen)“ und „günstig (zuerst Kürzen)“:*
   a) $\frac{5}{2} \cdot 8 =$ *b)* $\frac{13}{18} \cdot 36 =$ *c)* $\frac{50}{100} \cdot 2 =$ *d)* $\frac{36}{49} \cdot 14 =$
2. *Berechne „ungünstig“ und „günstig (lässt sich der Zähler schon teilen?)“: a)* $\frac{16}{5} : 8 =$ *b)* $\frac{45}{49} : 9 =$ *c)* $\frac{50}{100} : 25 =$ *d)* $\frac{21}{29} : 3 =$
3. *Stelle in einem Tortendiagramm dar:*
   a) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$ *b)* $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$
4. *Berechne:*
   a) $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{?}{y \cdot d}$ *b)* $\frac{a}{b} + \frac{1}{d} = \frac{?}{b \cdot d}$ *c)* $\frac{a}{b} + \frac{c}{1} =$
5. *Berechne: (Lösungen in vertauschter Reihenfolge:* $1/8; 1/6; 8/5; 3/20; 13/12; 7/12$*)*
   a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{1}{2} =$ *c)* $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$

   d) $\frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} =$ *e)* $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$ *f)* $\frac{17}{18} - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} =$

6. *Berechne auf 2 Arten: „Klammer zuerst“ und „ausmultiplizieren“:*
   a) $(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}) \cdot 2 =$ *b)* $(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) \cdot 6 =$ *c)* $(3\frac{3}{4} - 1\frac{3}{8}) \cdot 8 =$

7. *Berechne: (Lösungen in vertauschter Reihenfolge:* $5/12; 3/8; 2/15$*)*
   a) $(1\frac{2}{3} - \frac{3}{5}) : 8 =$ *b)* $(7\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4}) : 10 =$ *c)* $(3\frac{2}{3} + 1\frac{3}{4}) : 13 =$

8. *Stelle in einem Tortendiagramm (Pizza) und als Rechnung dar:*
   a) Die Hälfte der Hälfte. b) Zwei Drittel von einem Viertel.

9. *Rechne selbst nach:*

   a) $2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5} \cdot (1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{9}) = 1\frac{35}{36}$

   b) $(2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5}) \cdot 1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{9} = 1\frac{5}{36}$

   c) $(2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5}) \cdot (1\frac{2}{3} - 1\frac{1}{9}) = \frac{3}{4}$

Übung 6 (Zusätzlicher Übungszettel)
Siehe Übungszettel Rationale Zahlen