Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Reinhard Fink

19. September 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichte

- bei Naturvölkern: 1, 2, viele
- bei Völkern mit Handel, ab 3000 v. Chr. in Ägypten und Mesopotamien

2 Darstellung

Verschiedene Darstellungen von Zahlen sind möglich:

- unser Zehnersystem
- Binär- bzw. Dualsystem im Computer
- Hexadezimal- bzw., Sechszehnersystem zur besseren Darstellung von Binärzahlen. Muss ab unserer Zahl "10" neue Ziffern einführen.
- Sechzigersystem aus dem alten Mesopotamien, heute noch in der Uhrzeit (60 Minuten = 1 Stunde)
- Römisches Zahlensystem, als einziges kein Stellenwertsystem. Es müssen immer neue Ziffern verwendet werden. L = 50, C = 100 (Centum), D = 500, M = 1000 (Mille) usw.

Übung 1 (Suche: Information zu Zahlensystemen)
Suche auf Wikipedia nach Information zu den Zahlendarstellungen.

Zahlendarstellung in den verschiedenen Zahlensystemen:

10er	2er	16er	60er	Rom
0	0	0	L	
1	1	1	v	I
2	10	2	vv	II
3	11	3	vvv	III
4	100	4	vvvv	IV
5	101	5	vvvvv	V
6	110	6	vvvvvv	VI
7	111	7	vvvvvvv	VII
8	1000	8	vvvvvvvv	VIII
9	1001	9	vvvvvvvvv	IX
10	1010	A	<	X
11	1011	B	<v	XI
12	1100	C	<vv	XII
13	1101	D	<vvv	XIII
14	1110	E	<vvvv	XIV
15	1111	F	<vvvvv	XV
16	10000	10	<vvvvvv	XVI

3 Stellenwertsysteme

In Stellenwertsystemen gibt es immer eine endliche Menge von Ziffersymbolen:

$$Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$Z_2 = \{0, 1\}$$

$$Z_{16} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

$$Z_{60} = \{\text{L,v,vv}, \ldots, < < < < <\text{vvvvvvvvv}\}$$

Wenn alle Ziffern beim Zählen aufgebraucht sind, dann springt man um einen Stellenwert weiter. Ersichtlich auch in obiger Tabelle.

- im 10er - System: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, ... , 19,20, usw.
- im 2er - System: 0,1,10,11,100,101, usw,
- im 16er - System: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,10,11, usw.

Wir sehen hier weiters, dass es ohne die 0 nicht gehen würde. Nur so können wir Stellenwerte ausschalten. z.B.: 10
So erreichen wir schließlich unsere bekannte Zahlendarstellung:

$$5762 = 5 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2$$

bzw. mit Potenzen

$$5762 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Hier sieht man auch, dass wir immer mit .10 zum nächsten Stellenwert weiter springen können. $1 \cdot 10 = 10, 10 \cdot 10 = 10^2 = 100, 100 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ usw.

4 Definition der natürlichen Zahlen

Erklärung des Wortes Definition: Namensgebung für einen mathematischen Begriff

Definition 1 (Menge, Elemente einer Menge)
Die Zusammenfassung unterscheidbarer Dinge nennen wir eine Menge. *Die unterscheidbaren Dinge nennen wir die* Elememente

Kurzschreibweise:
Das Element e ist aus der Menge M: $e \in M$
Das Element f ist nicht in der Menge M: $f \notin M$

Beispiele für Mengen:

- Menge der im Raum anwesenden Personen = {Peter, Paul, Anna, ...}
- Menge der Staaten in der EU = { A, D, It, ... }
- {} die leere Menge
- usw.

Keine Mengen: {Peter, Peter, Anna, ...} Peter 2x

Definition 2 (Die natürlichen Zahlen)
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
nennen wir die Menge der natürlichen Zahlen.

5 Eigenschaften von $\mathbb{N}$

5.1 Vorgänger/Nachfolger

Bis auf die 0 hat jede natürliche Zahl einen Vorgänger.
Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

5.2 Ordnung

Die Menge der natürlichen Zahlen ist geordnet.

$$0 < 1 < 2 < 3 \dots$$

z.B. die Menge der Dreiecke ist nicht geordnet.

6 Runden von Zahlen

Will man eine Zahl, etwa die Höhe eines Berges, runden, so wird angegeben, auf welche Stelle man rundet. Wir wollen die Höhe des Schneebergs 2 076 m auf die Hunderterstelle runden. Im nachfolgenden unterstrichen.
$2\underline{0}78$
Dazu betrachtet man die Ziffer der vorangegangenen Stelle, in diesem Fall die Zehnerstelle. Diese lautet 7. Bei den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 wird abgerundet, bei 5, 6, 7, 8 und 9 wird bekanntlich aufgerundet. Der Schneeberg ist also (gerundet auf die Hunderterstelle) ca. 2 100 m hoch.

Übung 2 (Runden)
Runde nachfolgende Zahlen auf die angegeben Stellen:

- 6 528 085 *jeweils auf die Hunderttausender-, Hunderter- und die Zehnerstelle.*
- 4 101 998 *jeweils auf die Millionen-, Tausender- und die Zehnerstelle.*
  Achtung: bei der Zehnerstelle betrifft das Runden hier mehrere Stellen!
- *Gib auf der Webseite https://www.wolframalpha.com/ in das Eingabefenster:* $round(4101998, 1000000)$*, dann* $round(4101998, 1000)$ *und zum Schluss* $round(4101998, 10)$ *ein.*

7 Das Konzept der Variable

In der Sprache verwenden wir Sätze wie:
Jemand im Raum hat sich meinen Bleistift ausgeliehen.
Das Wort *jemand* bezeichnet hier eine beliebige Person im Raum. Die Möglichkeit ein unbestimmtes Element einer Menge zu benennen erweist sich auch in der Mathematik als günstig.

Definition 3 (Variable)
Mit einer Variablen *bezeichnen wir ein unbekanntes Element einer Menge.*

Beispiele für Anwendungen von Variablen:

- n eine beliebige natürliche Zahl
- $n + 1$ der Nachfolger einer natürlichen Zahl
- $n < n + 1$ zur Formulierung von Eigenschaften
- $3x - 1 = 5$ Variable/Unbekannte in einer Gleichung
- $a + b = b + a$ Formulierung eines Rechengesetzes

- zur Beschreibung von Mengen:
  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 100\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots 100\}$
  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = p \cdot q, \text{ mit } p, q \text{ Primzahl}\}$

8 Rechenoperationen in $\mathbb{N}$

8.1 Die Addition

8.1.1 Vom Zählen zur Additionstabelle

Grundsätzlich könnten das Zusammenzählen = Addieren zweier Zahlen immer durch weiterzählen lösen.

$$8 + 3 = 8 + 1 + 1 + 1 = 9 + 1 + 1 = 10 + 1 = 11$$

Da dies jedoch sehr umständlich ist lernt man als Kind alle möglichen Additionen von Ziffern auswendig. Das sieht dann folgendermaßen aus:

Additionstabelle:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Übung 3 (Fragen und Forschungsaufgaben zur Additionstabelle:)
Beantworte nachfolgende Fragen:

1. *Alle diese Rechnungen hast du in der Volksschule gelernt und geübt. Wie viele sind es?*
2. *Warum reichen sie aus, um alle möglichen Additionen in $\mathbb{N}$ zu beherrschen?*
3. *Wie sieht eine Additionstabelle für das alten Rom, das alten Babylon und für Computer aus?*
4. *Kannst du in der Tabelle eine Symmetrieachse (= Spiegelachse) finden?*
5. *Versuche die Eigenschaft, die die Symmetrieachsen beschreibt, mathematisch zu formulieren.*

6. *Wenn du davon ausgehst, dass du n + 0, n + 1 nicht und z.B. 5 + 6 = 6 + 5 nur einmal gelernt hast, wie viele verschiedene Additionen musstest du in der Volksschule lernen? Kennzeichne sie farbig in obiger Tabelle.*

7. *Berechne die Zeilensumme* $Z_0 = 0 + 1 + ... + 9 =?; Z_1 =?, Z_2 =?und Z_3 =?$ *Kannst du obiges Ergebnis begründen?*

8. *In* Z_7 *gilt: 7 + 16 = 23, 8 + 15 = 23, 9 + 14 = usw.. Berechne die restlichen Summen gleicher Art in* Z_7 , Z_8 *und in* Z_9.

9. *Hast du eine Idee wie diese Eigenschaft zur schnellen Berechnung von Zeilensummen genutzt werden könnte? Findest du noch andere Summen in denen obige Eigenschaft auftaucht?*

10. *Was bedeutet es, wenn eine Zahl oft vorkommt?*

11. *Warum gibt es in der Diagonale nur gerade Zahlen?*

12. *Berechne die Summe der Zahlen in der Diagonale.*

13. *Was fällt dir auf, wenn du die Summe zweier aufeinander folgender Zahlen und den Zahlen darunter bildest?*

Definition 4 (Summand & Summe)
In der Addition $a + b = c$ *nennen wir* a *und* b *die* Summanden.
c *heißt die* Summe.

Wie wir in der obigen Additionstabelle sehen, gibt es bei einigen Additionen einen Übertrag auf den nächsten Stellenwert. Dies funktioniert auch bei mehrstelligen Zahlen.
$5762 = 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
$3485 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
$9247 = 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
mit $6 \cdot 10 + 8 \cdot 10 = 14 \cdot 10 = 140 = 1 \cdot 100 + 4 \cdot 10$

Übung 4 (Additionen in Zeilen & Spalten)
Denke dir jeweils 2 5-stellige Zahlen aus und addiere sie in der Zeile und durch untereinander schreiben. Zwei gleiche Ergebnisse zeigen, dass richtig gerechnet wurde.

- *in der Zeile:*
  $7459 + 1817 = 9276$
- *untereinander:*
  7459
  $\underline{3817}$
  9276

8.1.2 Darstellung am Zahlenstrahl

Die natürlichen Zahlen und die Rechenoperationen lassen sich übersichtlich am Zahlenstrahl darstellen. Die Zahlen werden als Pfeile dargestellt.

$$3 = ---->$$

Die Addition als das Aneinanderhängen von Pfeilen:

$$3 + 2 = ----> --> = ------> = 5$$

8.1.3 Rechengesetze der Addition

Wie man in der Additionstabelle sieht gilt folgendes: $3 + 2 = 2 + 3$
Anschaulich ist auch mit den Pfeilen sofort klar, dass gilt:

$$3 + 2 = ----> --> = ------> = 5 = --> ----> = 2 + 3$$

Satz 1 (Kommutativ-/Vertauschungsgesetz der Addition = KG)
Für alle natürlichen Zahlen a *und* b *gilt:* $a + b = b + a$

Satz 2 (Assoziativgesetz der Addition = AG)
Für alle natürlichen Zahlen a, b *und* c *gilt:* $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Auch das Assoziativgesetz lässt sich leicht am Zahlenstrahl darstellen.
Weiters müssten mathematische Sätze = mathematische Behauptungen auch noch bewiesen werden. Da uns hier die genauere Definition der natürlichen Zahlen fehlt, sparen wir uns das :-)

Übung 5 (Graphische Darstellung des Assoziativgesetz)
Stelle das Assoziativgesetz mit den Zahlen $(2 + 3) + 4 = \dots$ *am Zahlenstrahl dar.*

Mit Hilfe dieser Rechengesetze lassen sich nun Behauptungen nachfolgender Art rechnerisch beweisen:
Die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist das Dreifache der mittleren Zahl.
$n+(n+1)+(n+2) = n+n+1+n+2 = n+n+1+n+1+1 = (n+1)+(n+1)+(n+1)$
Wir dürfen Klammern weglassen und Summanden vertauschen.

Übung 6 (Günstiges Rechnen)
Rechne von vorne nach hinten, streng der Reihe nach, als auch mit einem günstigeren Weg, z.B. $27 + 23 = 50$*, bei dem sich schönere Zwischenergebnisse ergeben:*

a) $27 + 48 + 23 + 52 =$	*b)* $391 + 757 + 243 + 609 =$
c) $745 + 555 - 821 - 89 - 123 =$	*d)* $773 - 650 - 50 + 743 + 145 =$
e) $897 + 294 - 97 =$	*f)* $365 + n - 65 - n =$ *(nur günstiger Weg)*

8.2 Die Subtraktion

Die Subtraktion ergibt sich aus dem Problem, wenn in einer Addition ein Summand, dafür aber die Summe bekannt ist.
2 und wie viel ist 5?

$$2+\ ? = 5$$

8.2.1 Darstellung am Zahlenstrahl

$$-- > +\ ? = ------ >$$

mittels Ergänzen:
- ->
- - - - ->
   - - ->
mittels Wegzählen:
- - - - ->
      <- -
- - - >
Die Darstellung mittels Wegzählen, führt zur Schreibweise:

$$5 - 2 = \ ?$$

Dies führt zu zwei Vorstellungen der Subtraktion:

- Ergänzen:
  $2+\ ? = 5$
- Wegzählen: $5 - 2 = \ ?$

Übung 7 (Subtraktion mit Ergänzen & Wegzählen)
Rechne $12 - 7 =$, $17 - 13 =$ *auf beide Arten.*

Übung 8 (Subtraktionen in Zeilen & Spalten)
Denke dir jeweils 2 5-stellige Zahlen aus, wobei die erste größer als die zweite sein muss, und subtrahiere sie in der Zeile und durch untereinander schreiben. Zwei gleiche Ergebnisse zeigen, dass richtig gerechnet wurde.

- *in der Zeile:*
  $7459 - 1817 = 5642$
- *untereinander:*
   7459
  -3817
   5642

In der obiger Übung verwenden wir das Ergänzen. Hier fällt auf, dass wir wieder günstig Ziffer für Ziffer rechnen. Wenn sich Rechnungen wie 8 + ? = 2 nicht ausgehen, dann leihen wir uns einen Stellenwert von der nächsten Stelle aus und rechnen 8 + ? = 12. Dieser Stellenwert wird dann geschickterweise nicht von der ersten Zahl abgezogen sondern zur zweiten dazu gezählt. Am Beispiel 1000 - 999 sieht man besonders gut, warum das praktisch ist.

Definition 5 (Minuend, Subtrahend & Differenz)
In der Subtraktion $a - b = c$ *nennen wir* a Minuend *und* b Subtrahend.
c *heißt die* Differenz.

Merkhilfe: Minuend minus Subtrahend gleich Wert der Differenz (Eselsbrücke: Minuend kommt im Alphabet vor Subtrahend)

8.2.2 Rechengesetze der Subtraktion

Wie wir leicht an Gegenbeispielen überprüfen können, gilt für die Subtraktion weder das Kommutativ- noch das Assozitaivgesetz.

Übung 9
Zeige an Gegenbeispielen, dass das KG und das AG für die Subtraktion nicht gilt.

Wie unsere Gegenbeispiele zeigen, dürfen wir Klammern bei Subtraktionen nicht einfach weglassen. Lassen sich also Terme wie

$$n - (20 - n)$$

nicht weiter ausrechnen bzw. vereinfachen? Wir betrachten dazu folgendes Beispiel,

$$6 - (3 - 1) = 4$$

von dem wir das Ergebnis wissen, und versuchen dieses OHNE Ausrechnen der Klammer zu lösen.

```
- - - - - - >   6
     <- - -     6 - 3
       ->       3 - 1
- - - - >        = 4
```

und wir können diese Rechnung als

$$6 - 3 + 1 =$$

interpretieren. Für die Rechnung

$$6 - (3 + 1) = 2$$

lässt sich Ähnliches zeigen.

Übung 10
Spiele beide Fälle mit selbst gewählten Zahlen durch.

Wir können daher nachfolgenden Rechenregel ohne Beweis formulieren.

Rechenregel 1 ($-$ vor Klammer auflösen)

$$a-(b+c)=a-b-c$$

$$a-(b-c)=a-b+c$$

Merkregel:
Ein Minuszeichen vor der Klammer dreht die darin enthalten Vorzeichen beim Auflösen der Klammer um.

Übung 11 (Klammern auf 2 Arten:)
1. Rechne von vorne nach hinten, streng der Reihe nach. Berechne dazu jede Klammer einzeln.
2. Löse alle Klammern auf, sortiere nach Vorzeichen und berechne daraus das Gesamtergebnis.

a) $87-(93-56-21)+21=$ *b)* $764+(387-356+100)-(415-325)-387=$
c) $92-(92-50)-(55-29)=$ *d)* $758-(374-222-111)+(321-123)=$
e) $85-(45-(25-10))=$ *f)* $83-(47+(23-10))=$

Übung 12 (Klammern auflösen:)
Zeige, dass diese Rechnungen stimmen:

a) $76-(23+n)+n=53$ *b)* $815-(633-18-x)-x=200$
c) $67-(23-(12-a)-a)=56$ *d)* $256-(138-(K-12))-K-6=100$

Übung 13 (Rechnungen richtig stellen:)
Was ist bei nachfolgenden Rechnungen falsch gelaufen? Kann man die Rechnungen so ausbessern, dass das ursprüngliche Ergebnis herauskommt?

a) $50-33-22=50-11=39$ *b)* $50-39+10=50-49=1$

Übung 14 (Rechenschritte begründen:)
Warum darf man statt $a-b-c$ auch $a-c-b$ schreiben?

Übung 15 (Klammern außen nach innen und innen nach außen:)
Löse die Klammern einmal von außen nach innen und anschließend von innen nach außen auf:

a) $65-(33-(12-9)+14)=$ *b)* $52-(39+(26-19)-28)=$
schwieriger:
c) $154-(87-(42-(35-29)+19))=$ *d)* $6-(5-(4-(3-(2-1))))=$
zum Knobeln:
e) stimmt das? $a-(b-(a-(b-(b-a))))=a-b$

Übung 16 (Textaufgaben)
Rechnen mit heißer Luft und tauchen mit Pressluft ;-)

- *Ein Heißluftballon startet in Innsbruck 576 m über dem Meeresspiegel und steigt nach dem Start 1371 m. Anschließend sinkt er 485 m und gleich nochmals um 271 m. Um die Nordkette bei der Hafelekar Bergstation in 2.269 m Seehöhe überqueren zu können, steigt der Ballon dann um 754 m knapp über die Höhe der Seegrubenbahn Bergstation (1.905 m). Nach kurzem Zwischenstopp zur Besichtigung der neu umgebauten Seilbahnstation geht es weitere 396 m nach oben zum höchsten Punkt des Aussichtsfluges. Berechne wie viele Meter der Ballon bei seinem Zwischenstopp zur Besichtigung über der Seegrubenbahn Bergstation schwebt. Berechne den höchsten Punkt und den Abstand des höchsten Punktes zur Hafelekar Bergstation?*
- *Ein Taucher taucht bei einem Tauchgang zuerst auf 15 m Tiefe ab. Dann steigt er nochmals um 5 m um anschließend 25 m nach unten zu tauchen. Anschließend sinkt er nochmals um 3 m und um 7 m und steigt wieder 5 m. Dann steigt er 3 m nachdem er nochmals 16 m tiefer gegangen ist. Beim Auftauchen legt er nach 8 m, 10 m, 10 m, 8 m, 5 m, 5 m, 4 m Dekompressionpausen ein. Stelle den Tauchgang als Rechnung dar. Wie tief lag sein tiefster Punkt? In welcher Tiefe liegt seine letzte Dekompressionspausen?*

8.3 Die Multiplikation

Peter hat sich 3 Packungen Fizzers gekauft. In jeder Packung befinden sich 6 Fizzers. Wie viel Fizzers hat Peter nun?

$$6 + 6 + 6 = 18$$

oder kürzer

$$6 \cdot 3 = 18$$

8.3.1 Darstellung am Zahlenstrahl

$$------> ------> ------> = ------------------->$$

8.3.2 Darstellung als Fläche

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

$= 3 \cdot 6 =$

1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6

$= 6 \cdot 3$

Definition 6 (Faktor, Produkt)
In der Subtraktion $a \cdot b = c$ *nennen wir* a *und* b Faktoren.
c *heißt das* Produkt.

Damit wir einzelne Rechnungen nicht durch viele Additionen mühsam zusammenzählen müssen, z.B. $7+7+7+7+7+7+7+7 = 7 \cdot 8$ lernen wir das 1x1.

1x1 Multilikationstabelle:

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Übung 17 (Fragen und Forschungsaufgaben zur Multiplikationstabelle:)
Beantworte nachfolgende Fragen:

1. *Woran erkennt man in der Tabelle, dass die Multiplikation kommutativ ist?*

2. *Welche Eigenschaft haben die Produkte in der Diagonale von links oben nach rechts unten?*

3. *Wenn man das 1x1 geschickt lernt, was kann man in der Tabelle alles streichen?*

Wie bei der Addition und bei der Subtraktion können wir Multiplikationen wieder günstig stellenweise durchführen. Wir starten zuerst mit der Multiplikation mit 2, darunter einen Stellenwert nach rechts verschoben folgt die Multiplikation mit 8.

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & 3 & 9 & . & 2 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 7 & 8 & & & \\ & 5 & 9 & 1 & 2 & & \\ \hline 2 & 0 & 6 & 9 & 2 & & \end{array}$$

mit $\overrightarrow{28}$ von links nach rechts

Wir können aber auch mit der Multiplikation mit 8 starten und darunter die einen Stellenwert nach links verschobene Multiplikation mit 2 schreiben.

$$\begin{array}{cccccccc} & & 7 & 3 & 9 & . & 2 & 8 \\ \hline & 5 & 9 & 1 & 2 & & & \\ 1 & 4 & 7 & 8 & & & & \\ \hline 2 & 0 & 6 & 9 & 2 & & & \end{array}$$

mit $\overleftarrow{28}$ von rechts nach links

Übung 18 (Multiplikationen in beide Richtungen)
Berechne auf 4 verschieden Arten und erhalte immer das gleiche Ergebnis:

- $678 \cdot \overrightarrow{93}$

- $678 \cdot \overleftarrow{93}$
- $93 \cdot \overrightarrow{678}$
- $93 \cdot \overleftarrow{678}$

8.3.3 Rechengesetze der Multiplikation

Wie man in der 1x1 - Tabelle und beim Flächenbild sieht gilt das KG:

Satz 3 (Kommutativ-/Vertauschungsgesetz der Multiplikation = KG)
Für alle natürlichen Zahlen a *und* b *gilt:* $a \cdot b = b \cdot a$

Satz 4 (Assoziativgesetz der Multiplikation = AG)
Für alle natürlichen Zahlen a, b *und* c *gilt:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

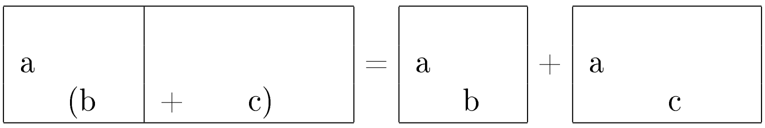
Das Assoziativgesetz lässt sich als die Berechnung eines Würfelvolumens vorstellen.

Übung 19 (Graphische Darstellung des Assoziativgesetz)
Stelle das Assoziativgesetz mit den Zahlen $(4 \cdot 3) \cdot 2 = \dots$ *mit Hilfe einer Würfelskizze dar.*

Es folgt nun das für uns wohl wichtigste Rechengesetz.

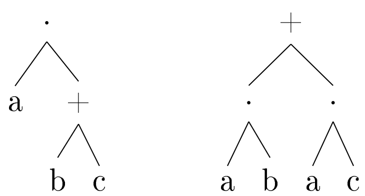
Satz 5 (Distributivgesetz = DG)
Für alle natürlichen Zahlen a, b *und* c *gilt:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Das DG lässt sich durch folgendes Bild wunderschön darstellen. Eine Fläche wird in 2 Flächen zerteilt, aber der Flächeninhalt bleibt der gleiche.



Definition 7 (Hineinmultiplizieren & Herausheben)
Wenn wir $a \cdot (b + c) \rightarrow a \cdot b + a \cdot c$ *verwenden, sprechen wir vom* Hineinmultiplizieren.
Wenn wir $a \cdot b + a \cdot c \rightarrow a \cdot (b + c)$ *verwenden, sprechen wir vom* Herausheben.

Darstellung des Distributivgesetzes als Rechenbaum:
$a \cdot (b + c) \quad = \quad a \cdot b + a \cdot c$



Das Distributivgesetz ermöglicht es eine Multiplikation in eine Summe umzuwandeln und umgekehrt.

Übung 20
Erstelle für die Rechnung $a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$ sowohl eine Darstellung mit Flächen w.o. als auch eine Darstellung als Rechenbaum. Beachte, dass an einem $+$ ocder $\cdot$ immer nur 2 Zahlen angehängt sein dürfen.

Übung 21 (Hineinmultiplizieren)
Multipliziere bei den nachfolgenden Rechnungen hinein:

- $2 \cdot (3 + 4) =$
- $3 \cdot (x - 42) =$
- $a \cdot (b - c) =$
- $3x \cdot (y - y \cdot z) =$
- $ax \cdot (2y - 3z) =$

Übung 22 (Herausheben)
Hebe bei den nachfolgenden Rechnungen aus der Summen einen gemeinsamen Faktor heraus:

- $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 =$
- $2 \cdot 5 + 12 =$
- $3 \cdot x + 4 \cdot x =$
- $x \cdot y + x \cdot z =$
- $mn + mlk =$
- $abc + abd =$
- $st + s =$

8.3.4 Vorfahrtsregeln

Beim Rechnen mit $+, -, \cdot, :$ wurden Vorfahrtsregeln eingeführt. Grundsätzlich wären $+$ und $\cdot$ gleichberechtigt. Um sich jedoch zusätzliche Klammern zu sparen, wurden nachfolgende Vorfahrtsregeln eingeführt.

1. als erstes werden Klammern ausgerechnet (sowieso klar)
2. dann die Punktrechnungen $\cdot, :$ (eine von uns getroffene Abmachung)
3. zum Schluss die Strichrechnungen $+, -$

Merkregel: Kla-Pu-Stri
Klammer, vor Punkt und Strich lässt sich mit dem Kunstwort *Kla-Pu-Stri* gut merken.

8.3.5 Multilikation von Binomem

Sehr bald werden uns Rechnungen/Terme der Form $(x+3)\cdot(x-2)$ begegnen. Das DG besagt jedoch nicht, wie hiermit umzugehen ist. Terme der Form $a+b)$ nennt man Binome.

Übung 23 (Binome als Flächen)
Stelle die Rechnung $(a+b)\cdot(c+d)$ wie beim DG als Fläche dar. In wie viel kleinere Einzelflächen kann hier zerschnitten werden? Wie groß sind diese Einzelflächen jeweils?

Um die Sache mit Hilfe des DG rechnerisch anzugehen, wenden wir einen Trick an. Wir bezeichnen $(a+b)$ mit A. Dann können wir wie folgt mit dem DG rechnen:

$$(a+b)\cdot(c+d) = A\cdot(c+d) = A\cdot c + A\cdot d$$

nun können wir A wieder mit $(a+b)$ zurückübersetzen:

$$A\cdot c + A\cdot d = (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d$$

wir wenden nun das DG auf die Klammern an:

$$(a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d = ac + bc + ad + bd$$

und erhalten das Ergebnis, das aus der Flächendarstellung schon bekannt sein sollte. Jedes Element der 1. Klammer wird mit jedem Element der 2. Klammer multipliziert.

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

Übung 24 (Binome mit 2 x DG ausrechen)
Stelle $(a+b)\cdot(c+d) = ac+bc+ad+bd$ mit Rechenbäumen dar.

Übung 25 (Binome mit 2 x DG ausrechen)
Wandle die nachfolgenden Multiplikationen von Binomen wie oben in Summen um.

- $(2+5)\cdot(7+3) =$
- $(x+3)\cdot(y+2) =$

Übung 26 (Binome schnell ausrechen)
Wandle die nachfolgenden Multiplikationen von Binomen in Summen um, indem du zuerst mit der 1. Zahl die 2. Klammer abarbeitest und dann mit der 2. Zahl.

- $(x+3)\cdot(y+2) =$
- $(x+y)\cdot(a+b) =$
- $(2x+y)\cdot(a+3b) =$
- $(2a+b)\cdot(x+y+z) =$ *(warum gibt es hier 6 Summanden)*

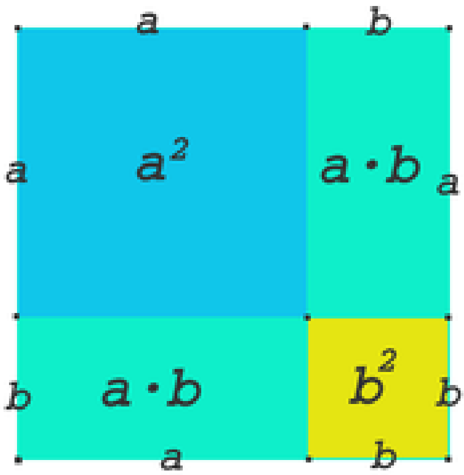
8.3.6 Die Binomischen Formeln

Da nachfolgende Binome besonders oft vorkommen, sind sie in den binomischen Formeln zusammengefasst.

$$(a+b)\cdot(a+b) = \quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \tag{1}$$
$$(a-b)\cdot(a-b) = \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \tag{2}$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2 \tag{3}$$

Übung 27
Überprüfe obige Formeln durch ausmultilizieren.

Den Ausdruck $2ab$ nennen wir das *doppelte Produkt.*
Im Fall von $(a+b)\cdot(a-b)$ heben sich die beiden gemischten Produkte auf.
Es ist daher auch ersichtlich, dass für a^2+b^2 keine binomische Formel über bleibt.
Die erste binomische Formel $(a+b)^2)$ lässt sich wieder anschaulich mit Flächen darstellen.



Auch die beiden andern Formel lassen sich mittels Flächen darstellen, allerdings nicht so anschaulich.
Das Ausmultiplizieren von Binomen sollte nun kein Problem mehr sein, aber das Erkennen von Binomen aus Summen muss geübt werden. Daher nachfolgende Übung.

Übung 28 (Binomische Formeln erkennen)
Wandle nachfolgende Summen in Produkte bzw. Quadrate von Binomen um, oder begründe warum dies nicht möglich ist. Hilfe:
* $2a\cdot 2a = (2a^2) = 2\cdot 2\cdot a\cdot a = 4a^2$.
* *Finde die Ursprünge beider Quadrate und überprüfe das doppelte Produkt.*

- $x^2+2xy+y^2 = (\_+\_)^2$
- $4a^2+4ay+y^2 =$
- $r^2-2rs+s^2 =$

- $a^2 - 6ab + 9b^2 =$
- $c^2 - d^2 =$
- $a^2 + b^2 =$
- $x^2 + xy + y^2 =$
- $4m^2 + 8mn + 4n^2 =$
- $9x^2 - 12xy + 4y^2 =$
- $25x^2 - 10xy + y^2 =$
- $25x^2 - 50xy + 25y^2 =$
- $x^2 + y^2 + 2xy =$
- $-2ab + b^2 + a^2 =$

8.4 Die Division:

Gleich wie bei die Frage $2+? = 5$ zur Subtraktion führt, bringt uns

$$2 \cdot ? = 10$$

zur Division.

$$10 : 2 =$$

Und ähnlich wie es für die Subtraktion die Vorstellung von Ergänzen bzw. Abziehen gibt, können wir je nach Aufgabenstellung auch für die Division 2 Vorstellungen verwenden.

- Messen:
  Wie oft hat die Strecke 2 in der Strecke 10 Platz?
- Teilen:
  Was bekommt jeder, wenn 10 auf 2 Personen aufgeteilt wird?

Und wie sich auch bei der Subtraktion nicht alle Rechnungen in $\mathbb{N}$ durchführen lassen, sind auch nicht alle Divisionen in $\mathbb{N}$ möglich.

Definition 8 (Divident, Divisor & Quotient)
In der Division $a : b = c$ nennen wir a Divident *und b* Divisor.
c heißt der Quotient.

8.4.1 Rechengesetze der Division

Wie wir leicht an Gegenbeispielen überprüfen können, gilt für die Division weder das Kommutativ- noch das Assozitaivgesetz.

Übung 29
Zeige an Gegenbeispielen, dass das KG und das AG für die Division nicht gilt.

In manchen Fällen kann man das DG in der Form $(a + b) : c$ anwenden, wenn die Teilergebnisse natürliche Zahlen ergeben.

8.4.2 Vorstellung schriftliches Dividieren (optional)

Zur Anschauung stellen wir uns hier vor, dass es für jeden Stellenwert entsprechende Geldscheine gibt, die auch in kleinere Geldscheine gewechselt werden können. Nun sollen 16378€ auf 5 Personen aufgeteilt werden.

$$16378 : 5 = 1 \cdot 10000 + \cdots : 5 => Jeder : 0 \cdot 10000$$

ein 10000€ Schein lässt sich nicht auf 5 Personen aufteilen, wir wechsel diesen daher in 10 x 1000€ Scheine um, und versuchen weiter

$$16378 : 5 = 16 \cdot 1000 + \cdots : 5 => Jeder : 3 \cdot 1000$$

5 x 3000€ = 15000€ wurden aufgeteilt, es bleiben also noch 1378€ zum Aufteilen übrig. Die 1000€ Scheine wurden schon aufgeteilt, wir können uns nach dem Wechseln des einen 1000€ Scheins in 10 x 100€ Scheine an das Aufteilen der 100€ Scheine machen.

$$1378 : 5 = 13 \cdot 100 + \cdots : 5 => Jeder : 2 \cdot 100$$

5 x 200€ = 1000€ wurden aufgeteilt, es bleiben also noch 378€ zum Aufteilen übrig.

$$378 : 5 = 37 \cdot 10 + \cdots : 5 => Jeder : 7 \cdot 10$$

5 x 70€ = 350€ wurden aufgeteilt, es bleiben also noch 28€ zum Aufteilen übrig.

$$28 : 5 = 28 \cdot 1 : 5 => Jeder : 5 \cdot 1$$

5 x 5€ = 25€ wurden aufgeteilt, es bleiben also noch 3€ zum Aufteilen übrig, die sich nicht aufteilen lassen. Daraus folgt:

$$16378 : 5 => Jeder : 0 \cdot 10000 + 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

$$16378 : 5 = 3271\ Rest : 3$$

Probe: $3271 \cdot 5 + 3 = 61355 + 3 = 16378$