

Die ganzen Zahlen

Reinhard Fink

12. August 2022

Inhaltsverzeichnis

1	Geschichte	1
2	Darstellung am Zahlenstrahl	1
3	Definition der ganzen Zahlen	2
4	Eigenschaften von \mathbb{Z}	2
4.1	Vorgänger/Nachfolger	2
4.2	Ordnung	2
4.3	\mathbb{Z} erweitert \mathbb{N}	2
5	Rechenoperationen in \mathbb{Z}	2
5.1	Die Addition	2
5.2	Die Subtraktion	3
5.3	Die Multiplikation & die Division	3

1 Geschichte

Siehe bei <https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-geschichte>

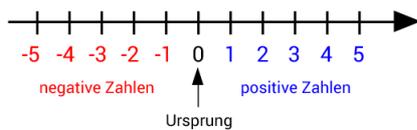
2 Darstellung am Zahlenstrahl

Die Darstellung der Rechnung $2 - 5 =$ mittels Pfeilen für sofort zu einer vernünftigen anschaulichen Vorstellung der ganzen Zahlen.

-->
<-----
<---

Unser Zahlenstrahl muss als nach links in den kleiner werdenden Bereich verlängert

werden.



3 Definition der ganzen Zahlen

Definition 1 (Die ganzen Zahlen)

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \}$$

nennen wir die Menge der ganzen Zahlen.

– und + sind Vorzeichen.

Da wir für die Vorzeichen – und + die selben Symbole wie für die entsprechenden Rechenzeichen verwenden, müsste man, Wenn man ganz exakt sein will, oder Verwechslungen ausschließen will, ganze Zahlen mit Klammern schreiben z.B.: $-5 = (-5)$ und $7 = +7 = (+7)$.

4 Eigenschaften von \mathbb{Z}

4.1 Vorgänger/Nachfolger

Jede ganze Zahl einen Vorgänger und einen Nachfolger.

4.2 Ordnung

Die Menge der natürlichen Zahlen ist geordnet.

$$\dots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \dots$$

4.3 \mathbb{Z} erweitert \mathbb{N}

\mathbb{Z} erweitert die Menge der natürlichen Zahlen. Die natürlichen Zahlen sind als Teilmenge in \mathbb{Z} enthalten.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

5 Rechenoperationen in \mathbb{Z}

5.1 Die Addition

Anschaulich erfolgt die Addition gleich wie bei den natürlichen Zahlen durch Aneinanderhängen von Pfeilen.

Übung 1 (KG)

Stelle die Rechnungen $(+2) + (-5) =$ und $(-5) + (+2) =$ am Zahlenstrahl dar.

Übung 2 (AG)

Stelle die Rechnungen $((+2) + (-5)) + (-4) =$ und $(-5) + ((+2) + (-4))$ am Zahlenstrahl dar.

Aus obigen Übungen ist ersichtlich, dass das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition auch in \mathbb{Z} gilt.

5.2 Die Subtraktion

Bei den natürlichen Zahlen haben wir Pfeile für die Subtraktion umgedreht.

Übung 3 (minus minus)

Stelle die Rechnungen $(+2) - (-5) =$ und $(-2) + (+5) =$ am Zahlenstrahl dar.

Aus obigen Übungen ist ersichtlich, dass ein Minus vor der Klammer das Vorzeichen umdreht. Wir können Rechnungen daher verkürzt schreiben:

$$(+2) - (-5) = (-2) + (+5) = -2 + 5$$

5.3 Die Multiplikation & die Division

Anschaulich sind uns folgende Rechnungen sofort klar:

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$2 \cdot (-3) = (-6)$$

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2) = (-6)$$

nur bei

$$(-2) \cdot (-3) =$$

muss man etwas tricksen. Man möchte ja, dass alle Rechengesetze erhalten bleiben.

$$(-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot ((+2) - (-5)) = (-2) \cdot (+2) - (-2) \cdot (-5) = (-4) - (-10) = (+6)$$

Das heißt:

$$(-2) \cdot (-3) = (-6)$$

und wir können uns für Multiplikationen und Divisionen merken:

Merkregel: minus x minus = plus

$$+ \cdot + = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

$$- \cdot - = +$$

Übung 4 (Rechnen mit ganzen Zahlen)

Vereinfache nachfolgende Rechnungen:

- $-4 - (-19) - (-4) =$
- $-8 + [7 - (-3 + 8)] =$
- $-4 - [-4 + (3 - (-8))] - (5 - (-7)) =$
- $(-15) : (+3) + 12 : (-4) =$
- $(-2) \cdot (-3) \cdot 5 - (9 - 2) + 3 \cdot (-3) =$
- $(-24) : (-6) - (-6) - [-2 - (+4)] =$
- $(-6n) + (+2) - [14 + (-7n)] + 2n =$

Berechne einmal mit Klammern ausrechnen und einmal mit Klammern auflösen:

- $(-2) - [(-7) + (-4)] =$
- $(-9) + (+3) - [12 - 8 + (-5)] - [(-12) - (-8)] =$
- $8 - (-7) - [(-7) - (-15)] - 6$