457 Forme um!

Beispiel $(\underbrace{3x}_{a} - \underbrace{2y}_{b}) \cdot (\underbrace{3x}_{a} + \underbrace{2y}_{b}) = \underbrace{9x^2}_{a^2} - \underbrace{4y^2}_{b^2}$

a) $(x + z)(x - z) =$ c) $(5 - 2x)(5 + 2x) =$ e) $\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right) =$

b) $(2a + b)(2a - b) =$ d) $(3x + 5y)(3x - 5y) =$ f) $\left(\frac{2a}{3} + \frac{b}{4}\right)\left(\frac{2a}{3} - \frac{b}{4}\right) =$

458 Ergänze aufgrund der Formel $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$!

a) $(2x - 3y) \cdot (\quad\quad) = \quad\quad - 9y^2$ d) $(a - \quad\quad) \cdot (\quad\quad + 7b) =$

b) $(2a + \quad\quad) \cdot (\quad\quad - 5) = 4a^2 - \quad\quad$ e) $(\quad\quad + 3v) \cdot (5u - \quad\quad) =$

c) $(\quad\quad + 2a^2) \cdot (3b - \quad\quad) = \quad\quad$ f) $(4v^3 + \quad\quad) \cdot (\quad\quad) = \quad\quad - 36t^6$

459 Schreibe als Produkt zweier Terme!

a) $u^2 - v^2 =$ c) $16y^2 - 36 =$ e) $\frac{1}{4}x^2 - y^2 =$ g) $-9s^2 + \frac{t^2}{9} =$

b) $4a^2 - b^2 =$ d) $9z^4 - 16z^2 =$ f) $4u^2 - \frac{y^2}{9} =$ h) $-\frac{4r^2}{9} + 16s^2 =$

460 Vereinfache soweit wie möglich! Führe jeweils die Probe für $a = 2$, $b = 1$ durch!

a) $(a + b)^2 + (a - b)^2 + (a + b)(a - b) =$
b) $(a + b)^2 - (a + b)(a - b) + (a - b)^2 =$
c) $(a + b)^2 + (a + b)(a - b) - (a - b)^2 =$
d) $(a - b)^2 + (a + b)(a - b) - (a + b)^2 =$
e) $(2a - b)^2 - (a - 2b)^2 - 3(a + b)(a - b) =$
f) $(2a + b)^2 - (a - 2b)^2 - 3(a + b)(a - b) =$
g) $a^2 - [(a - b)^2 + (a - b)(a + b)] =$
h) $b^2 - [(a + b)^2 - (a + b)(a - b)] =$
i) $ab - [(a + b)^2 - (a - b)^2] =$
j) $a^2 + [(a + b)^2 - (a - b)^2] =$
k) $2ab - [(a - b)^2 - 2ab] =$
l) $2ab - [(a + b)^2 + a^2] =$

461 Das Quadrat jeder natürlichen Zahl ist um 1 größer als das Produkt ihrer Nachbarzahlen.

1) Überprüfe diesen Satz anhand von fünf selbst gewählten natürlichen Zahlen!
2) Schreibe diesen Satz mit Variablen auf und begründe ihn!

462 Addiert man zu einer natürlichen Zahl ihr Quadrat, so ist diese Summe gleich dem Produkt aus der Zahl mit ihrem Nachfolger.

1) Überprüfe durch Einsetzen von Zahlen!
2) Beweise diese Behauptung! Übersetze zunächst den Text in die Sprache der Mathematik und forme dann um!

463 Bildet man die 3. Potenz einer natürlichen Zahl und subtrahiert man davon die Zahl selbst, so erhält man das Produkt dieser Zahl mit ihren beiden Nachbarzahlen.

1) Überprüfe diesen Satz anhand von fünf selbst gewählten natürlichen Zahlen!
2) Übersetze diesen Satz in die Sprache der Mathematik! Begründe den Satz, indem du eine Seite der Gleichung so umformst, dass sich der Term der anderen Seite ergibt!

464 Wenn keine der Zahlen $n - 1$, n und $n + 1$ durch 5 teilbar ist, ist $n^2 + 1$ sicher durch 5 teilbar.

1) Überprüft diesen Satz anhand von fünf selbst gewählten natürlichen Zahlen!
2) Führt den hier skizzierten Beweis dieses Satzes zu Ende!
   Beweis: Wenn keine der Zahlen $n - 1$, n und $n + 1$ durch 5 teilbar ist, dann ist entweder $n - 2$ oder $n + 2$ durch 5 teilbar. Erklärt diesen Ansatz!
   Daher können wir im ersten Fall schreiben:
   $n - 2 = 5 \cdot t \Rightarrow n = 5 \cdot t + 2 \Rightarrow n^2 = 25 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 4 \Rightarrow n^2 + 1 = 25 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 5$
   Diese Zahl ist durch 5 teilbar. Begründet die Teilbarkeit!
3) Führt den Beweis für den zweiten Fall!